Acta Sci. Math., 42 (1980), 171—173

Bemerkung zu einem Satz von S. Kaczmarz

KÁROLY TANDORI

Für ein orthonormiertes System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ im Intervall (0, 1) bilden wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_n(\varphi, x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

S. KACZMARZ [2] hat bewiesen, daß im Falle

(1) $$L_n(\varphi; x) = O(1) \quad (x \in (0, 1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

und für $a=\{a_k\}_1^\infty \in l^2$ die Reihe

(2) $$\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k(x)$$

fast überall in (0, 1) konvergiert.

Weiterhin haben wir in [3] Folgendes gezeigt:

Ist $a \notin l^2$, dann gibt es ein orthonormiertes System φ in (0, 1) derart, daß (1) erfüllt ist, und die Reihe (2) in (0, 1) fast überall divergiert.

In dieser Note werden wir für diese Behauptung einen einfacheren Beweis geben, der sogar noch etwas mehr ergibt.

Für ein orthonormiertes System φ in (0, 1) bilden wir

$$L_n^*(\varphi; x) = \int_0^1 \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt.$$

Offenbar gilt

$$L_n(\varphi; x) \leq L_n^*(\varphi; x).$$

Wir beweisen.

Satz. *Ist* $a \notin l^2$, *so gibt es ein orthonormiertes System* φ *in* (0, 1) *mit*

(3) $$L_n^*(\varphi; x) = O(1) \quad (x \in (0, 1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

derart, daß die Reihe (2) *in* (0, 1) *überall divergiert.*

Eingegangen am 10. April 1979.

Bemerkung. Dieser Satz ist eine Verschärfung eines vorigen Resultates von Verf. [4]. Nach einem Satz von L. CSERNYÁK [1] gilt im Falle (3) und $a\in l^2$

$$\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right| \in L^2(0, 1).$$

Beweis des Satzes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $0\leqq a_k \leqq 1$ voraussetzen. Es sei $0=n(1)<\ldots<n(l)<\ldots$ eine Indexfolge mit der Eigenschaft

$$A_l^2 = \sum_{k=n(l-1)+1}^{n(l)} a_k^2 \geqq 4^l \quad (l = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Mit $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ bezeichnen wir die Indizes k, für die $a_k=0$ ist. Es sei $Z(l)$ die Menge der Indizes k mit $n(l-1)<k\leqq n(l)$ und $a_k\neq 0$ $(l=2, 3, \ldots)$.

Es seien weiterhin $I_k(l)$, $J_k(l)$ $(k\in Z(l);\ l=2, 3, \ldots)$, J_i $(i=1, 2, \ldots)$ Teilintervalle von (0, 1) mit den Eigenschaften (für $l, l_1, l_2=2, 3, \ldots$)

$$I_{k_1}(l)\cap I_{k_2}(l) = \emptyset \quad (k_1, k_2\in Z(l), k_1 \neq k_2) \quad \bigcup_{k\in Z(l)} I_k(l) = (0, 1),$$
$$\operatorname{mes} I_k(l) = a_k^2/A_l^2 \quad (k\in Z(l)),\ I_k(l)\cap J_k(l) = \emptyset \quad (k\in Z(l)),$$
$$J_{k_1}(l_1)\cap J_{k_2}(l_2) = \emptyset \quad (k_1\in Z(l_1)),\ k_2\in Z(l_2),\ (k_1-k_2)^2+(l_1-l_2)^2 \neq 0),$$
$$\operatorname{mes} J_k(l) = \operatorname{mes} I_k(l)/l^2 \quad (k\in Z(l)), \quad J_{i_1}\cap J_{i_2} = \emptyset \quad (i_1, i_2 = 1, 2, \ldots;\ i_1 \neq i_2).$$

Unter den obigen Bedingungen kann man solche Intervalle leicht angeben.

Es sei $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen in (0, 1) mit den Eigenschaften

$$|\varphi_k(x)| = \begin{cases} A_l/a_k\cdot l, & x\in I_k(l) \\ (1-1/l^2)/\sqrt{\operatorname{mes} J_k(l)}, & x\in J_k(l) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (k\in Z(l)),$$

$$|\varphi_{k_i}(x)| = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} J_i}, & x\in J_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ein solches System kann leicht angegeben werden; man hat die Gruppe der Funktionen $\varphi_{n(l-1)+1}(x), \ldots, \varphi_{n(l)}(x)$ durch Rekursion zu definieren.

Es sei $x\in(0, 1)$. Auf Grund der Definition der Intervalle $J_k(l)$, J_i und der Funktionen $\varphi_k(x)$ gibt es einen Index l_0 derart, daß

$$x\notin \left(\bigcup_{l=l_0}^{\infty} \bigcup_{k\in Z(l)} J_k(l)\right)\cup\Big(\bigcup_{\substack{i \\ k_i>n(l_0-1)}} J_i\Big). \tag{5}$$

Ist $l\geqq l_0$, dann gibt es auf Grund von (5) und der Definition von $\varphi_k(x)$ einen Index $k(x, l)\in Z(l)$ mit

$$\left|\sum_{k=\nu(l-1)+1}^{\nu(l)} a_k \varphi_k(x)\right| = |a_{k(x,l)}\varphi_{k(x,l)}(x)| = A_l/l \geqq 2^l/l.$$

Daraus folgt, daß die Reihe (2) im Punkt x divergiert.

Es sei $x \in (0, 1)$. Auf Grund der Definition der Intervalle $I_k(l)$, $J_k(l)$, J_i und der Funktionen $\varphi_k(x)$ gibt es für jedes l einen Index $k(x, l) \in Z(l)$ mit $x \in I_{k(x,l)}$; weiterhin existieren Indizes l_0, $k_0(x, l_0)(\in Z(l_0))$ und i_0 mit $x \in J_{k_0(x,l_0)}$, $x \in J_{i_0}$. Dann gilt für jedes n

$$\max_{1 \leq s \leq n} \left| \sum_{k=1}^{s} \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| \leq \sum_{l=2}^{\infty} |\varphi_{k(x,l)}(x)\, \varphi_{k(x,l)}(t)| + |\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)\, \varphi_{k_0(x,l_0)}(t)| + |\varphi_{k_i}(x) \varphi_{k_i}(t)|.$$

Auf Grund der Definition der Funktion $\varphi_k(x)$ ergibt sich dann

$$\int_0^1 \max_{1 \leq s \leq n} \left| \sum_{k=1}^{s} \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \sum_{l=2}^{\infty} \Big(|\varphi_{k(x,l)}(x)| \int_{I_{k(x,l)}} |\varphi_{k(x,l)}(t)|\, dt + |\varphi_{k(x,l)}(x)| \int_{J_{k(x,l)}} |\varphi_{k(x,l)}(t)|\, dt \Big) +$$

$$+ |\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)| \int_{I_{k_0(x,l_0)}} |\varphi_{k_0(x,l_0)}(t)|\, dt + |\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)| \int_{J_{k_0(x,l_0)}} |\varphi_{k_0(x,l_0)}(t)|\, dt +$$

$$+ |\varphi_{k_{i_0}}(x)| \int_{J_{i_0}} |\varphi_{k_{i_0}}(t)|\, dt =$$

$$= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{A_l^2}{a_{k(x,l)}^2\, l^2} \operatorname{mes} I_{k(x,l)}(l) + \frac{A_l}{a_{k(x,l)}\, l} (1 - 1/l^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} J_{k(x,l)}(l)}} \operatorname{mes} J_{k(x,l)}(l) \right) +$$

$$+ (1 - 1/l_0^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0)}} \frac{A_l}{a_{k_0(x,l_0)}\, l_0} \operatorname{mes} I_{k_0(x,l_0)}(l) +$$

$$+ (1 - 1/l_0^2) \frac{1}{\operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0)} \operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0) + \frac{1}{\operatorname{mes} J_{i_0}} \operatorname{mes} J_{i_0} =$$

$$= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{1}{l^2} + (1 - 1/l^2)^{1/2} \frac{1}{l^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{l_0^2} \right)^{1/2} + (1 - 1/l_0^2) + 1 \leq 3 \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right) < \infty.$$

Damit haben wir bewiesen, daß (3) für das System φ erfüllt ist.

Schriftenverzeichnis

[1] L. Csernyák, On series of orthogonal functions, *Analysis Math.*, **1** (1975), 9—18.

[2] S. Kaczmarz, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121.

[3] K. Tandori, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 147—153.

[4] K. Tandori, Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits und A. Sharma, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **33** (1979), 391—394.

BOLYAI INSTITUT
UNIVERSITÄT SZEGED
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN